

解析: $y=f(x)=\begin{cases} x^2-2^x, & x \geq 0 \\ x^2-2^{-x}, & x < 0 \end{cases}$ 显然原函数是偶函数, 立即

排除 B, D.

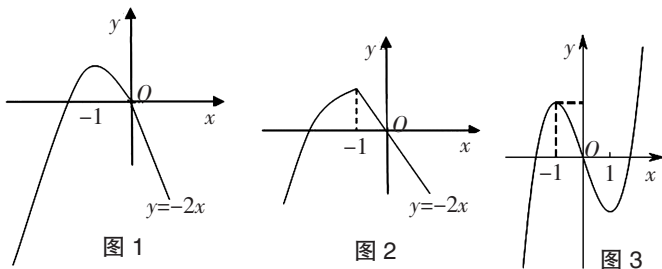
由解析式可知, 2, 4 是函数的两个零点, 可以考虑 $2 < x < 4$ 这一段的情况.

当 $2 < x < 4$ 时, $y=x^2-2^x$. 画出 $y_1=x^2$ 和 $y_2=2^x$ 的图像可知, 此时 $y_1 > y_2$, 即 $y > 0$, 排除 A. 故选 C.

6. 考查函数最值问题

例 6. 设 $a \in \mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3-3x, & x \leq a \\ -2x, & x > a \end{cases}$ (1) 若 $a=0$, 则 $f(x)$ 的最大值为 _____; (2) 若 $f(x)$ 无最大值, 则 a 的取值范围是 _____.

解析: (1) 当 $a=0$ 时, 由 $(x^3-3x)'=3x^2-3=0$, 得 $x=\pm 1$, 如图 1 是分段函数 $f(x)$ 的图像. 观察图形可知, 最高点是 $(-1, f(-1))$, 即 $(-1, 2)$, 所以 $f(x)$ 的最大值为 2.



(2) 当 $a=-1$ 时, 如图 2, 有最大值 2, 不合题意.

当 $a > -1$ 时, 如图 3 是 x^3-3x 在 $\mathbb{R}$ 上的图像, 此时 $f(x)$ 总有最大值, 不合题意.

当 $a < -1$ 时, 如图 4.

$f(a)+2a=a^3-3a+2a=a(a+1)(a-1) < 0$, $(x^3-3x)_{\min} < -2a$, 而 $-2x$ 在 $x > a$ 时无最大值. 满足题意.

综上可知, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -1)$.

点评: 本题主要考查分段整式函数的图像、导数处理三次函数、数形结合思想、分类讨论思想. 对 (1), 在求分段函数的最值时, 一般是先求出每段的最值, 各段最值中的最大(小)者, 才为整个函数的最大(小)值, 也可以观察整个分段函数图像的最高点或最低点得到函数的最大值或最小值. 对

(2), a 的变化影响到图像的位置, $a=-1$ 是一个临界点, 分 $a=-1$, $a > -1$ 或 $a < -1$ 三类进行讨论.

训练 6: (2017 年济南市模考卷理 15) 若函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x \leq 2 \\ 1+\log_a x, & x > 2 \end{cases}$ ($a > 0, a \neq 1$) 的最大值是 4, 则 a 的取值范围是 _____.

解析: 若 $a > 1$, 则函数 $3+\log_a x$ 在 $x > 2$ 时单增, 没有最大值, 因此必有 $0 < a < 1$.

此时 $3+\log_a x$ 在 $x > 2$ 时, 满足 $f(x) < f(2)=1+\log_a 2$.

而 $f(x)=x+2$ 在 $x \leq 2$ 时的最大值是 4. 因此应有 $1+\log_a 2 \leq 4$, 解得 $0 < a < \sqrt[3]{2}$.

故实数 a 的取值范围是 $(0, \sqrt[3]{2})$.

7. 考查函数零点问题

例 7. (2018 年安庆市模考卷文 15) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & (x \leq 0) \\ \frac{|\sin x|}{x}, & (x > 0) \end{cases}$ 则函数 $g(x)=f(x)-\frac{1}{8}$ 的零点个数是 _____.

解析: 显然, 当 $x \leq 0$ 时, $f(x)=\frac{1}{8}$ 没有解. 当 $x > 0$ 时, $\frac{|\sin x|}{x}=\frac{1}{8}$, 即 $|\sin x|=\frac{1}{8}x$.

由于 $0 \leq |\sin x| \leq 1$, 直线 $y=\frac{1}{8}x$ 经过 $(8, 1)$, 只要考虑直线 $y=\frac{1}{8}x$ 和曲线 $y=|\sin x|$ 在区间 $(0, 8]$ 上的交点个数.

画出草图, 不包括 $(0, 0)$, 有 5 个交点.

故函数 $g(x)$ 的零点个数是 5.

点评: 求分

段函数的零点, 必须先求出各段上的零点, 再取并集. 本题在处理时 $|\sin x|=\frac{1}{8}x$, 易忽视区间 $(0, 8]$ 而得到 6 个零点的错误答案. 处理函数 $f(x)$ 的零点问题主要有两种方法: 一是直接求 $f(x)=0$ 的实根或 $f(x)$ 的图像与 x 轴交点的横坐标; 二是将 $f(x)$ “一分为二” 为 $f(x)=g(x)-h(x)$, 再考察两个函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 图像的交点个数.

训练 7: (2018 年高考浙江卷理 15) 已知 $\lambda \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x)=\begin{cases} x-4, & x \geq \lambda \\ x^2-4x+3, & x < \lambda \end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 恰有两个零点, 则 λ 的取值范围是 _____.

解析: 当有 $y=x^2-4x+3$ 两个零点时, $\lambda > 4$.

当 $y=x^2-4x+3$ 有一个零点 1 时, $y=x-4$ 有一个零点 4, 则 $1 < \lambda \leq 3$.

故 λ 的取值范围是 $(1, 3] \cup (4, +\infty)$.

